

เอกสารประกอบการเรียนรู้เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6



นางอภิชนา มีทอง
โรงเรียนราชประชานุเคราะห์ ฝายมัธยม รัชดาภิเษก ในพระบรมราชูปถัมภ์
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษา มัธยมศึกษา เขต 6

ตอนที่ 1 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร

เท่าที่ผ่านมานักเรียนได้เรียนรู้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่ยุ่งยากและซับซ้อน ทำให้เสียเวลา ดังนั้นเพื่อให้การหาอนุพันธ์ได้อย่างสะดวกและรวดเร็วกว่า จึงใช้สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาสูตรเป็นลำดับต่อไป

ข้อตกลงเบื้องต้น

เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ หรือ y' หรือ $f'(x)$ สำหรับ x ทุกค่า



เอกสารพัฒนาการเรียนรู้ที่ 1.1

คำชี้แจง ให้นักเรียนทบทวนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้บทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูปแบบของลิมิต

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = 3$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\ &= 0\end{aligned}$$

1) จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = 5$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\end{aligned}$$



2) จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = -10$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

3) จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = c$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

สรุปสูตรที่ 1

ถ้า $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวแล้ว $f'(x) = \dots\dots\dots$



ต่อไปนี้มาศึกษาข้อสรุป
บทพิสูจน์และตัวอย่าง
ประกอบกันนะคะ

สูตรที่ 1 ถ้า $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์} \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = 5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง

$$1) \text{ กำหนดให้ } y = -7 \quad \text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2) \text{ กำหนดให้ } y = \sqrt{11} \quad \text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$



เอกสารฝึกหัดที่ 1.1

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) กำหนดให้ $y = -5$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

2) กำหนดให้ $y = -1$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

3) กำหนดให้ $y = 8$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

4) กำหนดให้ $y = 10$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

5) กำหนดให้ $y = -\frac{1}{5}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

6) กำหนดให้ $y = \frac{1}{3}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

7) กำหนดให้ $y = -\frac{3}{5}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

8) กำหนดให้ $y = \sqrt{3}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

9) กำหนดให้ $y = -\sqrt{15}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

10) กำหนดให้ $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$



เอกสารพัฒนาการเรียนรู้ที่ 1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนทบทวนการหาอนุพันธ์ที่กำหนด โดยใช้บทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
ในรูปแบบของลิมิต

กำหนด $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$

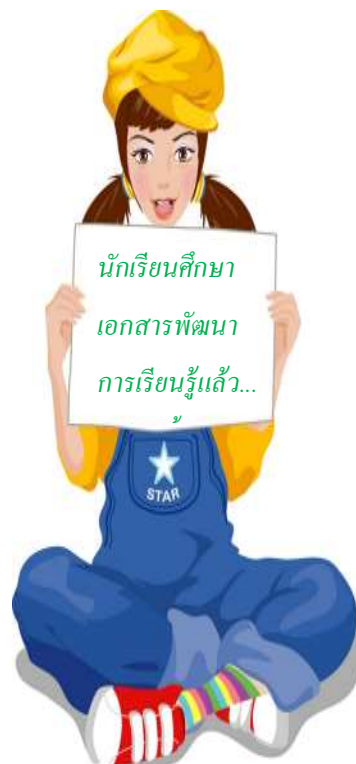
$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x) = x$ แล้ว $f'(x) = 1$



เอกสารพัฒนาการเรียนรู้ที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนทบทวนการหาอนุพันธ์ที่กำหนด โดยใช้บทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
ในรูปแบบของลิมิต

1. กำหนด $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$



ให้นักเรียนพิจารณา $f(x) = x^2$ และ $f'(x) = 2x$ แล้ว
ตอบคำถามที่กำหนดให้ต่อไปนี้นะคะ...



$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
1. เลขชี้กำลังของ x เท่ากับ	1. สัมประสิทธิ์ของ $2x$ เท่ากับ
คำตอบในช่องว่างข้อ 1 (เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)	
2. เลขชี้กำลังของ x เท่ากับ	2. เลขชี้กำลังของ x เท่ากับ
คำตอบในช่องว่าง ข้อ 2 (เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)	
ถ้าคำตอบในข้อ 2 ไม่เท่ากันแล้ว มีค่าต่างกันอยู่เท่าไร (ต่างกันเท่ากับ)	
3. สรุปได้หรือไม่ว่า ถ้า $f(x) = x^2$ แล้ว $f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$	

2. กำหนด $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$



$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
1. เลขชี้กำลังของ x เท่ากับ	1. สัมประสิทธิ์ของ $3x^2$ เท่ากับ
คำตอบในช่องว่างข้อ 1 (เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)	
2. เลขชี้กำลังของ x เท่ากับ	2. เลขชี้กำลังของ x^2 เท่ากับ
คำตอบในช่องว่างข้อ 2 (เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)	
ถ้าคำตอบในข้อ 2 ไม่เท่ากันแล้ว มีค่าต่างกันอยู่เท่าไร (ต่างกันเท่ากับ)	
3. สรุปได้หรือไม่ว่า ถ้า $f(x) = x^3$ แล้ว $f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$	
4. $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง แล้ว $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	



สูตรที่ 3 ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงแล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$

$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์ } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right) \\
 &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

พยายาม

นะกะ...

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = x^6$ จงหา $f'(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก} \quad f(x) &= x^6 \\
 \text{จะได้} \quad f'(x) &= 6x^{6-1} \\
 &= 6x^5
 \end{aligned}$$



ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = \frac{1}{x^4}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-4})$

$$= -4x^{-4-1}$$

$$= -4x^{-5}$$

$$= -\frac{4}{x^5}$$



กำหนดให้ $y = \sqrt{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

เนื่องจาก $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

เอกสารแนะแนวทางที่ 1.1

ตัวอย่างนำ ถ้า $f(x) = x^4$ แล้ว $f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$

1. ถ้า $f(x) = x^5$ แล้ว $f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = \dots\dots\dots$

2. ถ้า $f(x) = \frac{1}{x^3}$ แล้ว $f'(x) = -3 \cdot x^{-3-1} = \dots\dots\dots$ (เพราะว่า $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$)

3. ถ้า $f(x) = \sqrt{x}$ แล้ว $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
(เพราะว่า $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$)

4. ถ้า $f(x) = \sqrt{x^3}$ แล้ว $f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
(เพราะว่า $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$)

5. ถ้า $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ แล้ว $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
(เพราะว่า $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$)

6. ถ้า $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ แล้ว $f'(x) = -\frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
(เพราะว่า $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$)

7. $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง แล้ว $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$



เอกสารฝึกหัดที่ 1.2

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. ถ้า $f(x) = x^7$ แล้ว $f'(x) = 7 \cdot x^{7-1} = \dots\dots\dots$

2. ถ้า $f(x) = \frac{1}{x^4}$ แล้ว $f'(x) = \dots\dots\dots$

3. ถ้า $f(x) = \sqrt{x^5}$ แล้ว $f'(x) = \dots\dots\dots$

4. ถ้า $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^5}}$ แล้ว $f'(x) = \dots\dots\dots$